La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves.

Hamid Chaachoua

LA PRAXEOLOGIE COMME MODELE DIDACTIQUE POUR LA PROBLEMATIQUE EIAH. ETUDE DE CAS : LA MODELISATION DES CONNAISSANCES DES ELEVES.[1]

Hamid Chaachoua

Equipe MeTAH, LIG. Université Joseph Fourier

Hamid.Chaachoua@imag.fr

Résumé

Notre recherche porte sur la modélisation didactique et informatique des connaissances des élèves et les usages des environnements informatiques dans l'enseignement des mathématiques. Elle se place ainsi dans la problématique des environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH). Nous avons présenté dans la note de synthèse d'HDR (Chaachoua, 2010) un modèle basé sur des concepts de la théorie anthropologique du didactique, en particulier sur l'approche praxéologique, pour la modélisation de l'apprenant dans un EIAH. Cette modélisation a été faite dans différents domaines d'algèbre : la résolution des équations, la factorisation, la réduction. Dans ce document, nous présentons ce modèle en montrant comment le modèle praxéologique a été adapté pour décrire le rapport personnel des élèves et implémenté dans un environnement informatique (Croset, 2009).

Mots clés

Algèbre, apprenant, connaissance, diagnostic, EIAH, praxéologie personnelle, trace

I. INTRODUCTION

Mon HDR porte sur la modélisation didactique et informatique des connaissances des élèves où j'ai élaboré un modèle basé sur des concepts de la théorie anthropologique du didactique (TAD), en particulier sur l'approche praxéologique, pour la modélisation de l'apprenant dans un EIAH. L'élaboration de ce modèle est l'aboutissement de deux types de travaux : modélisation des connaissances d'un sujet au sein de la TAD et la modélisation de l'apprenant, par des praxéologies, dans un EIAH.

Trois raisons m'ont motivé à se placer dans la TAD.

- La première est de disposer d'un même modèle pour décrire les attentes d'une institution I et les activités de l'élève en tant que sujet de I. Or, la TAD nous propose le modèle praxéologique pour décrire l'organisation du savoir au sein d'une institution, les activités

[1] Ce texte a été publié dans :
Chaachoua H. (2011) La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves. In Abboud-Blanchard M., Flückiger A. (eds). Séminaire national de didactique des mathématiques. 81-102. Paris. http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/AAR12001.pdf

des sujets attendues par l'institution. Notre travail a consisté à intégrer dans cette approche les comportements non attendues par l'institution, en particulier les erreurs des élèves.

- La deuxième est que le modèle praxéologique me semble adéquat pour une implémentation informatique et donc à une modélisation informatique des connaissances.
- La troisième est que ce modèle, peut servir à d'autres problématiques EIAH comme les scénarios (perspectives de mes recherches).

Nous ne présentons pas ici la théorie anthropologique compte tenu de l'abondante littérature la concernant : pour ne citer que les principales, nous renvoyons le lecteur à (Chevallard, 1992), (Bosch & Chevallard, 1999) et (Chevallard, 1999). Cependant, nous préciserons la modélisation de la connaissance dans cette théorie (paragraphe II). En particulier, nous présenterons notre utilisation du modèle praxéologique pour décrire les praxéologies ponctuelles, institutionnelles et personnelles pour décrire les connaissances de l'apprenant. Enfin, nous présenterons sa mise en œuvre dans un EIAH (paragraphe III).

II. LA MODELISATION DE LA CONNAISSANCE DANS LA TAD

La prise en compte de la connaissance d'un élève dans la TAD, a été faite dès le début à l'aide de la notion de rapport au savoir. Une personne X connait un objet O si cet objet existe pour X, c'est-à-dire s'il existe un rapport personnel R(X, O) de X à O (Chevallard 1992, pp. 86-87). Ce rapport désigne le système de toutes les interactions possibles de X avec O interactions constituant la connaissance qu'a X de O (Chevallard, 2003). Il en est de même pour une institution (Bosch & Chevallard, 1999) avec, cette fois, un rapport institutionnel RI(O) d'une institution I à un objet O.

Au cours des années 90, plusieurs travaux[2] se sont intéressés à étudier la conformité des rapports personnels des élèves avec le rapport institutionnel : (Assude, 1992) (Grugeon, 1995) ou des enseignants (Bronner, 1997) (Chaachoua, 1997).

Dans sa thèse, Assude (Assude, 1992) étudie l'écart entre ce que l'élève est censé apprendre et ce qu'il a effectivement appris. Dans les termes de la TAD, il s'agit d'évaluer l'écart du rapport personnel au rapport institutionnel pour l'élève relativement à l'objet étudié, ici la racine carrée. Pour l'auteur les notions de conception ou de représentation, candidats à modéliser la connaissance, ne recouvrent que partiellement le rapport personnel d'un sujet.

> « Le terme de conception (ou de représentation) renvoie en effet à une réalité supposée qui tout à la fois, excède le rapport personnel et s'inscrit en lui sans l'épuiser. Car l'étude des conceptions, en vérité, ne s'intéresse qu'à une partie du rapport personnel des sujets. » (Assude, 1992, p.4).

Pour Chevallard, la notion de rapport personnel est à la fois un concept englobant mais aussi unificateur des aspects fragmentaires sous lesquels on décrit communément la connaissance.

> « Un individu X ne peut avoir, à un objet de savoir donné, Os, qu'un rapport personnel, lequel est émergent d'un système de relations institutionnelles (telle la relation didactique), relations ternaires où l'individu X entre avec l'objet de savoir Os et un ou des agents de l'institution I.

2 On ne citera que quelques travaux car la liste est bien longue.

De ce rapport personnel relève notamment tout ce qu'on croit ordinairement pouvoir dire - en termes de "savoir", de "savoir-faire", de "conceptions", de "compétences", de "maîtrise", d' "images mentales", de "représentations", d' "attitudes", de "fantasmes", etc…- de X à propos de Os. Tout ce qui peut être énoncé - à tort ou à raison, pertinemment ou non - doit être tenu (au mieux) pour un aspect du rapport personnel de X à Os. Le concept de rapport (personnel) apparaît comme englobant les aspects fragmentaires en lesquels on le dissocie ordinairement. » (Chevallard, 1989).

Comme le soulignent Bosch et Chevallard (Bosch & Chevallard, 1999), la notion du rapport au savoir inscrit la didactique dans le terrain de l'anthropologie de la connaissance (ou anthropologie cognitive). Ainsi :

« La *connaissance* – et le *savoir* comme une certaine *forme d'organisation de connaissances* – entre alors en scène avec la notion de *rapport* : un objet existe s'il existe un rapport à cet objet, c'est-à-dire si un sujet ou une institution le “ (re)connaît ” en tant qu'objet. Étant donné un objet (par exemple un objet de savoir) et une institution, la notion de rapport renvoie aux *pratiques sociales qui se réalisent dans l'institution et qui mettent en jeu l'objet* en question, soit donc à “ ce qui se fait dans l'institution avec cet objet ”. *Connaître* un objet c'est *avoir à faire avec* – et souvent *avoir affaire à* – cet objet.

Le *savoir mathématique*, en tant que forme particulière de connaissance, est donc le fruit de l'action humaine institutionnelle : c'est quelque chose qui se produit, s'utilise, s'enseigne ou, plus généralement, se transpose dans des institutions. Mais le mathématique reste encore un terme primitif, *hypostase* de certaines pratiques institutionnelles – les *pratiques sociales à mathématiques*. Ce qui fait défaut, c'est l'élaboration d'une méthode d'analyse des pratiques institutionnelles qui en permette la description et l'étude des conditions de réalisation. Les derniers développements de la théorisation viennent combler ce manque. La notion clé qui apparaît alors est celle d'*organisation praxéologique* ou *praxéologie*. » (Bosch & Chevallard, 1999, p.85).

Ainsi, pour décrire le rapport institutionnel qui contraint le rapport personnel d'un sujet à un objet de savoir, la théorie propose le modèle de praxéologie :

« le rapport institutionnel à un objet, pour une position institutionnelle donnée, est façonné et refaçonné par l'ensemble des tâches que doivent accomplir, par des techniques déterminées, les personnes occupant cette position. C'est ainsi l'accomplissement des différentes tâches que la personne se voit conduite à réaliser tout au long de sa vie dans les différentes institutions dont elle est le sujet successivement ou simultanément qui conduira à faire émerger son rapport personnel à l'objet considéré. » (Bosch & Chevallard, 1999).

La théorie anthropologique du didactique considère que, *en dernière instance*, toute activité humaine consiste à *accomplir une tâche* t d'un certain *type* T, *au moyen* d'une *technique* τ, justifié par une *technologie* θ qui permet en même temps de la *penser*, voire de la *produire*, et qui à son tour est *justifiable* par une *théorie* Θ. En bref, elle part du postulat que toute activité humaine *met en œuvre* une organisation que Chevallard (1998) note $[T/\tau/\theta/\Theta]$ et qu'il nomme *praxéologie*, ou *organisation praxéologique*. $[T / \tau]$ étant *la pratique* – ou encore le *savoir-faire* ; $[\theta / \Theta]$ le *logos* – ou encore le *savoir*. On parle de *praxéologie mathématique* – ou d'organisation mathématique – lorsque les types de tâches T relèvent des mathématiques, de *praxéologie didactique* – ou d'organisation didactique – lorsque les types de tâches *T* sont des types de tâches d'étude.

Généralement, en une institution I donnée, une théorie Θ répond de plusieurs technologies θ_j, dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques τ_{ij} correspondant à autant de types de tâches T_{ij}. Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en organisation locales, $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, centrées sur une technologie θ déterminée, ensuite en organisations régionales, $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$, formées autour d'une théorie Θ. Au-delà, Chevallard (Chevallard, 1999) nomme organisation globale le complexe praxéologique $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$ obtenu, dans une institution donnée, par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories Θ_k.

Dans notre recherche nous avons utilisé le modèle praxéologique pour analyser les productions des élèves. Ce modèle nous a permis de caractériser le rapport institutionnel en position d'élève à partir de l'analyse des erreurs qu'ils commettent, analyse effectuée en relation avec les techniques qu'ils mettent en œuvre pour résoudre algébriquement les équations du second degré (Nguyen, Chaachoua, & Comiti, 2007). Dans sa thèse Croset (Croset, 2009) prolonge ce travail en introduisant la notion de *praxéologie-en-acte* pour analyser et décrire les connaissances des élèves. C'est ce que nous proposons de reprendre dans cet article en l'inscrivant dans un cadre plus général.

II.1. Description des praxéologies ponctuelles institutionnelles

Comme le précise (Bosch & Gascon, 2004) l'organisation mathématique à enseigner constitue un modèle praxéologique du curriculum mathématiques qui est obtenu à partir des programmes et les manuels. L'identification de ces OM à enseigner passe par la caractérisation du type de tâches institutionnel qui est une « re »construction du chercheur à partir de l'analyse des manuels et des programmes. Notons que le chercheur peut procéder à un autre découpage que celui de l'institution voire le compléter pour des raisons liées à sa problématique. Il s'agit de construire une OM de référence (Bosch & Gascon, 2004). Dans notre étude, la construction d'une telle OM de référence doit prendre en compte les praxéologies institutionnelles.

Caractérisation des types de tâches

Pour caractériser un type de tâches nous considérons comme premier principe : « le type de tâches T regroupe *les tâches qui peuvent être accomplies par une même technique* τ, justifiée par une technologie θ qui elle même justifiée par une théorie Θ. Le quadruplet $[T/\tau/\theta/\Theta]$, constitue une praxéologie ponctuelle, « ce dernier qualificatif signifiant qu'il s'agit d'une praxéologie relative à un unique type de tâches » (Chevallard, 1999). Soulignons que pour un même type de tâche, il peut exister plusieurs techniques dont certaines peuvent être plus efficaces que d'autres selon le type de tâches proposé. Par exemple, le type de problème « montrer l'alignement de trois points » possède plusieurs techniques : angles, colinéarités, transformations …

Ainsi, à chaque type de tâches est associé plusieurs organisations mathématiques ponctuelles $(OMP_k(T))_k = ((T,\tau_k,\theta_k,\Theta_k))_k$. Ces différentes organisations ponctuelles ne sont pas mises en place en même temps. D'une manière générale l'institution de l'enseignement I organise l'étude des $(OMP_k(T))_k$ tout le long de la scolarité. Mais à un niveau scolaire donné on se limite à un petit nombre d'organisations ponctuelles comme le précise Chevallard : « en une institution *I* donnée, à propos d'un type de tâches *T* donné, il existe en général *une seule* technique, ou du moins *un petit nombre* de techniques *institutionnellement reconnues*, à l'exclusion des techniques alternatives possibles – qui peuvent exister effectivement, mais alors en *d'autres* institutions. » [3] (Chevallard, 1999).

Castella (Castela, 2008, p.168) précise que « l'organisation de l'enseignement mathématiques étant ce qu'elle est c'est-à-dire structurée par les savoirs théoriques (autrement dit l'étude de secteurs correspondant à une théorie, subdivisés en thèmes plus restreints correspondant à des éléments particuliers de la théorie – Chevallard, 2002), n'est généralement sensible à un moment donné de la chronogenèse qu'une seule technique pour un type de tâches donné, technique générée par les éléments de savoir théoriques en cours d'enseignement. Or, le rapprochement des techniques connues et des éléments technologico-théoriques associés suppose une vision transversale, trans-thèmes, trans-secteurs ». Ce rapprochement entre les organisations ponctuelles associées à un même type de tâches T étant peu assumé par I. Il nécessite une réorganisation des $(OMP_k(T))_k$, qui permet à l'élève de mettre en œuvre une $OMP_k(T)$ pour résoudre une tâche de T. Pour représenter l'organisation des $(OMP_k(T))_k$, Castella (Castela, 2008) a introduit la notion de *praxéologie ou organisation mathématique ponctuelle complexe relative à un type T* définit par $[T, (\tau_k, \theta_k, \Theta_k)_k, \theta^T]$[4] où θ^T est la technologie associée à *T* qui intègre les technologies θ_k dans un ensemble plus large situant les techniques les unes par rapport aux autres, cernant leurs domaines respectifs d'efficacité.

En dehors de certains types de tâches, qui sont essentiellement étudiées en fin de l'enseignement secondaire, I organise un travail progressif sur les $OMP_k(T)$. Le choix de la technique ne se pose pas : soit on donne à l'élève la possibilité de reconnaître la spécificité de l'énoncé de la tâche prescrite soit par le contexte associé à la tâche que la technique est induite.

Exemple

Entre la classe de quatrième et la classe de première on étudie un type de tâches T_{ra_eq2} : « résoudre une équation de second degré ». Plusieurs techniques sont mises en place selon la forme de l'équation à résoudre. Par exemple, la résolution de l'équation de la forme[5] $P_1(x)\times Q_1(x)=0$ est résolue par une technique dite du produit nul et celle de l'équation de la forme $P_1^2(x)=k$ $(k>0)$ est résolue par la technique basée sur l'utilisation de la racine carrée. Sur cet exemple de type de tâches le travail sur le couple « forme de l'équation » et « technique » est assumé par l'institution tout au long de la scolarité. Faut-il les considérer comme des types de tâches ou des sous-types de tâches de T_{ra_eq2} ? Nous reviendrons sur cette question dans ce paragraphe. Chacun de ces types de tâches admet une seule technique institutionnelle τ_i. Pour l'institution, l'apprentissage de ces types de tâche, qui se fait selon une certaine progression, assure la réussite du type de tâche : T_{ra_eq2}. Ainsi, en classe de première, face à une tâche t de T_{ra_eq2} l'élève est censé utiliser une des techniques τ_i selon le type d'équation. Pour cela, il doit reconnaître à quel type de tâches appartient t.

3 I correspond à un niveau scolaire.

4 Castella distingue dans la technologie deux composantes : « la *composante théorique* » notée θ^{th} et la « *composante pratique* » de la technologie notée θ^p (Castella, 2009, p.143). Nous ne souhaitons pas introduire cette distinction dans notre modèle.

5 Nous adoptons la notation : $P_i(x)$ désigne un polynôme de degré i.

Ainsi, plutôt que de confronter l'élève à un type de tâches pour lequel il existe plusieurs techniques, l'institution organise l'étude à travers plusieurs types de tâche pour lesquels il y a une seule technique. Nous appelons le premier, type de tâches visé qu'on notera $T_{visé}$.

Proposition

Soit T un type de tâches visé. Son apprentissage se fait dans le temps à travers l'étude des organisations mathématiques ponctuelles associées $(OMP_k(T))_k$. Si pour une $OMP_k(T)$ il y a une spécification pour caractériser les énoncés des tâches de $OMP_k(T)$, alors on parle de T_k *sous-type de tâches* de T. C'est-à-dire que l'institution s'est donnée des moyens pour caractériser les tâches de T où on attend la mise en œuvre de τ_k.

Nous introduisons la notion de portée institutionnelle d'une technique relative à un type de tâche, qu'on note $P_I(\tau/T)$: $P_I(\tau/T) = \{t \in T$ / I attend à ce qu'on mobilise τ pour accomplir t$\}$. Dans le cas où on peut caractériser $P_I(\tau/T)$ on la considère comme un sous-type de tâches de T.

Si le type de tâches T admet une unique technique dans I, on lui associe l'*organisation mathématique ponctuelle simple* définie par $OMP(T) = (T, \tau, \theta, \Theta)$. Sinon, on lui associe une *organisation mathématique ponctuelle complexe* définie par $OMPC(T) = [(OMP_k(T))_k, \theta^T]$ où :

- $OMP_k(T) = (T_k, \tau_k, \theta_k, \Theta_k)$ dans le cas où on peut caractériser la portée institutionnelle $P_I(\tau/T)$ de la technique τ_k dans I. T_k est alors un sous-type de tâche de T.
- $OMP_k(T) = (T, \tau_k, \theta_k, \Theta_k)$ sinon.
- θ^T est la technologie associée à *T* qui intègre les technologies θ_k dans un ensemble plus large situant les techniques les unes par rapport aux autres, cernant leurs domaines respectifs d'efficacité.

Soulignons que ce découpage est relatif à une institution et qu'il est possible de prendre en compte la dimension temporelle des OM au sein de chaque institution. En particulier, un type de tâches T peut avoir une organisation mathématique simple dans une institution I et une organisation mathématique complexe dans une autre institution I'.

Description des techniques

Le problème de description des techniques a été soulevé dans (Bosch & Chevallard, 1999) « … de quoi est faite une technique donnée ? De quels "ingrédients" se compose-t-elle ? Et encore : en quoi consiste la "mise en œuvre" d'une technique ? ». Si ce problème n'est pas posé explicitement dans les différents travaux qui font usage de l'analyse praxéologique, ces travaux en proposent des descriptions. Certains les décrivent sous forme d'actions plus ou moins structurées, d'autres les décrivent par des sous-tâches. Par exemple, dans (Cirade & Matheron, 1998) les auteurs décrivent la technique utilisée pour le type de tâches T : « résoudre une équation du premier degré », par des sous-tâches : développer une expression algébrique, effectuer les produits, transposer les termes, réduire chacun des membres, résoudre une équation de la forme a*x*=b. Puis, les auteurs ajoutent que ce découpage est arbitraire, et qu'il s'agit d'un modèle dont l'objectif est de mettre en évidence l'organisation mathématique et de l'évaluer. Nous voyons un intérêt dans ce découpage : il renvoie à des tâches reconnues institutionnellement et pour chacune d'elles il existe une praxéologie mathématique qui a été mise en place avant et il permet ainsi de mieux situer les difficultés des élèves dans la mise en œuvre d'une technique au niveau des sous-tâches qui composent la technique.

En partant de ce choix de description d'une technique, nous l'avons adopté dans notre recherche en distinguant plusieurs niveaux de description. La technique peut être décrite de façon *générique* quand on se place au niveau de type de tâches soit de façon *instancié* quand on se place au niveau d'une tâche. De plus, dans chaque cas on peut distinguer plusieurs niveaux de granularité de description.

Soit T un type de tâches d'organisations mathématiques ponctuelles $(OMP_k(T))_k$ au sein d'une institution I. Pour ne pas alourdir la notation avec l'indice k, on notera $(T, \tau, \theta, \Theta)$ une organisation ponctuelle associé à T.

Au niveau générique 1, la technique τ est décrite par une suite de type de tâches $(T_i)_i$. Nous distinguons deux types de tâches. D'une part, les types de tâches qui n'existent qu'à travers la mise en œuvre de techniques de certains types de tâches qu'on appelle type de tâches *intrinsèques*. D'autre part, les types de tâches qui peuvent être prescrites aux élèves qu'on appelle type de tâches *extrinsèque*. Nous reviendrons sur les motivations d'introduire cette distinction intrinsèque/extrinsèque dans l'étude de cas du paragraphe II.2.

Au niveau instancié 1, la technique est décrite par une suite de tâches $(t_i)_i$ qui sont des instanciations des types de tâche $(T_i)_i$ du niveau générique

A chaque T_i (de la description générique de la technique τ) est associé un ensemble d'organisations ponctuelles $(OMP_k(T_i))_k$ dans I. La mise en œuvre de T_i dans la technique τ repose sur la mobilisation d'une organisation ponctuelle de T_i. Notons que c'est la technologie θ^{Ti} de l'organisation mathématique complexe de T_i qui permet de faire le choix de l'organisation ponctuelle à mobiliser. Mais, au niveau générique on ne peut pas identifier l'organisation ponctuelle de T_i à mobiliser, sauf dans le cas où T_i n'admet qu'une seule technique, c'est-à-dire que l'OM de T_i est simple. Dans les autres cas, nous avons plusieurs techniques possibles et donc plusieurs praxis possibles. Au niveau générique 2, on peut associer à τ plusieurs descriptions à partir de ces praxis.

En revanche, au niveau instancié, on peut identifier les organisations ponctuelles qu'on peut mobiliser (dans le cas de l'analyse a priori) ou qui est mobilisée (dans le cas de l'analyse d'une production) pour chaque T_i. Dans ce cas on peut décrire la technique par une succession de praxis ce qui correspond au niveau instancié 2 : $\tau = ((t_i,\tau_i))_i$. Chaque technique τ_i peut être décrite à l'aide d'une suite de praxis jusqu'à un niveau qu'on considère comme élémentaire c'est-à-dire *des praxis élémentaires*.

Description des technologies

Soit T un type de tâches d'OM ponctuelle : $(T, \tau, \theta, \Theta)$. Au niveau 1, la technique τ est décrite par une suite de (T_i). La technologie θ a pour fonction de justifier en quoi la mise en œuvre de types de tâches T_i permet d'accomplir le type de tâches T. Elle ne comporte pas nécessairement les technologies des techniques de T_i sauf dans certains cas où un type de tâches T_i joue un rôle clé dans la technique τ. Dans ce cas, la technologie θ_i peut intervenir, éventuellement avec une adaptation, dans la description de la technologie θ.

II.2. Etude d'un cas : résolution des équations de degré 2

Ce paragraphe porte sur l'étude du type de tâches$T_{r\text{-}eq2}$ « résoudre une équation du second degré » et plus précisément $T_{ra\text{-}eq2}$ « résoudre algébriquement une équation du second degré ».

Dans un premier temps nous avons construit l'OM à enseigner pour le type de tâches $T_{r\text{-}eq2}$. Cette étude a été faite à partir de l'analyse des programmes où nous avons mis en évidence 8 OMP[6].

Or, ce type de tâches prolonge d'autres types de tâches (comme la résolution des équations de degré 1) et se prolonge en d'autres types de tâches (comme la résolution des équations degré 3). Ainsi, on peut considérer que l'étude de ce type de tâches contribue à l'étude d'un type de tâches visé $T_{r\text{-}eq.}$: « résoudre une équation ». Dans (Chaachoua, 2010) nous avons décrit l'OM de référence de ce type de tâches visé $T_{r\text{-}eq}$ en prenant en compte la diversité des OM à enseigner dégagées dans l'analyse des manuels afin de disposer d'une carte praxéologique la plus complète pour analyser le système d'enseignement (cf. annexe, fig.1).

A chaque type de tâches T est associé une organisation ponctuelle simple ou complexe. Pour les décrire nous avons adapté et complété le découpage des organisations mathématiques ponctuelles à enseigner dégagées dans l'analyse des programmes et des manuels en fonction de notre problématique de recherche. Pour les organisations mathématiques complexes nous présentons les praxéologies ponctuelles qui peuvent être potentiellement associées au type de tâches T. De plus, nous ne sommes pas restreints seulement aux types de tâche enseignés actuellement. Nous avons élargi à des types de tâches qui ont existé ou qui pourront exister dans l'enseignement. Une fois cette carte complétée, on peut en extraire des parties qui correspondent à ce qui est en vigueur dans l'enseignement à un moment donné et/ou un niveau donné. Les techniques sont décrites au niveau générique. Dans le cas où le type de tâches qui intervient dans la description de la technique a une organisation mathématique simple, nous présenterons la praxis associée. Les praxis élémentaires sont indiquées en italiques. Dans la description des technologies on se limitera essentiellement à donner les éléments importants de la composante théorique de la technologie.

Dans cet article nous présenterons quelques éléments[7] de l'organisation mathématique ponctuelle complexe du type de tâche $T_{ra\text{-}eq2}$. Nous en avons dégagé 6 OMP, on a :

$OMPC(T_{ra\text{-}eq2}) = [T_{ra\text{-}eq2} ; \{OMP_1(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_2(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_3(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_4(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_5(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_6(T_{ra\text{-}eq2})\} ; \theta^T]$

Chaque $OMP_i(T_{ra\text{-}eq2})$ est décrite à son tour selon le même modèle. Par exemple, pour $OMP_1(T_{ra\text{-}eqn})$ on a :

$OMP_1(T_{ra\text{-}eq2}) = (T_{ra\text{-}eq2.pn}, \tau_{ra\text{-}eq2.pn}, \theta_{ra\text{-}eq2.pn}, \Theta_{alg})$	
$T_{ra\text{-}eq2.pn}$	résoudre les équations de la forme $P_1(x)\times Q_1(x)=0$ ou $P_1^2(x)=0$ Exemple : $(x-1)(x+3)=0$
$\tau_{ra\text{-}eq2.pn}$	$\tau_{r\text{-}eq2.pn} = (T_{pn} ; T_{r\text{-}eq1})$ où : T_{pn} : appliquer la règle du produit : un produit de facteur est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. C'est un type de tâches intrinsèque. $T_{r\text{-}eq1}$: résoudre deux équations de degré 1.
$\theta_{ra\text{-}eq2.pn}$	La règle du produit nul est valable pour les expressions algébriques ce qui permet d'avoir une équivalence des équations.

6 cf. la note de synthèse (H. Chaachoua, 2010) pour le détail de l'analyse

7 Pour une description complète cf. (Chaachoua, 2010)

Θ_{alg}	Algèbre

La technique $\tau_{ra\text{-}eq2.pn}$ est décrite par une suite de deux types de tâches : le type de tâches T_{pn} est intrinsèque et on le considère comme élémentaire, et le type de tâches $T_{r\text{-}eq1}$ qui a sa propre organisation mathématique ponctuelle complexe OMPC($T_{r\text{-}eq1}$) qui est décrite par :

OMP($T_{ra\text{-}eq1}$) = ($T_{ra\text{-}eq1}$, $\tau_{r\text{-}aeq1}$, $\theta_{r\text{-}aeq1}$, Θ_{alg})	
$T_{ra\text{-}eq1}$	Résoudre les équations de la forme $P_1(x)=Q_1(x)$ où $P_1(x)$ et $Q_1(x)$ sont des polynômes de degré 1.
$\tau_{ra\text{-}eq1}$	$\tau_{r\text{-}eq1}$ = (T_{dev}, $T_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$, T_{red}, $T_{mvt\text{-}mult\text{-}eg}$, $T_{test.eg}$) où : T_{dev} : développer les deux membres (si nécessaire) $T_{mvt\text{-}adt}$: transposer les termes en x dans un membre et les termes constants dans un autre membre (si nécessaire) T_{red} : réduire les deux membres (si nécessaire) $T_{mvt\text{-}mult}$: transposer le facteur de x dans l'autre membre. $T_{test.eg}$: tester l'égalité avec la valeur trouvée.
$\theta_{r\text{-}aeq1}$	$\theta_{eq\text{-}eq}$: Equivalence des équations par transposition additive des termes ou multiplicative des facteurs (pour les types de tâche $T_{mvt\text{-}adt}$ et $T_{mvt\text{-}mult}$). $\theta_{eg\text{-}exp}$: Une expression algébrique égale à une autre expression algébrique obtenue par l'une des transformations : factorisation, développement et réduction (pour les types de tâches T_{dev} et T_{red}).
Θ_{alg}	Algèbre (élémentaire)

Les types de tâches T_{dev} et T_{red} ont leurs propres organisations mathématiques complexes que nous ne présentons pas ici.

Dans la description de la technique $\tau_{ra\text{-}eq1}$ nous avons introduits deux types de tâche $T_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$ et $T_{mvt\text{-}mult\text{-}eg}$. Ces deux types de tâches sont intrinsèques dans la mesure où ce ne sont pas des types de tâches pouvant être prescrits aux élèves. Ce sont des constituants essentiels de la technique ayant une technologie et une théorie. En les considérant comme des types de tâches ayant leur propres praxéologies nous avons pu décrire les techniques selon le même modèle avec possibilité d'itération jusqu'à un niveau élémentaire (cf. annexe, fig.2).

Leurs organisations mathématiques sont définies par :

OMP($T_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$) = ($T_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$, $\tau_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$, $\theta_{cons\text{-}eg\text{-}ad}$, Θ_{alg})	
$T_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$	Transposer un terme d'un membre d'une égalité à l'autre.
$\tau_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$	Ajouter l'opposé d'un terme aux deux membres de l'égalité. Souvent, quand la technique devient routinière elle s'exprime par : si a+b=c alors a=c-b.
$\theta_{cons\text{-}eg\text{-}ad}$	On ne change pas une égalité en ajoutant ou en soustrayant le même nombre à chacun de ces membres.
Θ_{alg}	Algèbre (élémentaire)

OMP($T_{\text{mvt-mult}}$) = ($T_{\text{mvt-mult-eg}}$, $\tau_{\text{mvt-mult-eg}}$, $\theta_{\text{cons-eg-ad}}$, Θ_{alg})	
$T_{\text{mvt-mult-eg}}$	Transposer un facteur d'un membre d'une égalité à l'autre.
$\tau_{\text{mvt-mult-eg}}$	Multiplier par l'inverse d'un facteur les deux membres de l'égalité. Souvent, quand la technique devient routinière elle s'exprime par : si ab=c alors a=c/b (b non nul) ou si a/b=c alors a=bc (b non nul)
$\theta_{\text{cons-eg-mult}}$	On ne change pas une égalité en multipliant ou en divisant chacun de ces membres par un même nombre non nul.
Θ_{alg}	Algèbre (élémentaire)

Dans la technologie $\theta_{\text{r-aeq1}}$ nous n'avons pas présenté les technologies spécifiques aux types de tâche qui interviennent dans la description au niveau 1 de la technique $\tau_{\text{ra-eq1}}$ car celles-ci interviennent au niveau 2 dans la mise en œuvre des techniques de ces types de tâches. Ainsi, il n'est pas pertinent d'évoquer la[8] technologie du type de tâches de développement T_{dev}. En revanche, nous présentons des éléments de la technologie qui sont plus spécifiques au type de tâches $T_{\text{ra-eq1}}$. Pa exemple, l'équivalence des équations suite aux transpositions des termes ou des facteurs est un élément important car il nous garantit que les solutions de l'équation transformée sont les solutions de l'équation de départ, qu'il ne convient pas de confondre avec les technologies $\theta_{\text{cons-eg-ad}}$ et $\theta_{\text{cons-eg-mult}}$ qui sont spécifiques à la notion d'égalité.

II.3. Description des praxéologies ponctuelles personnelles

Nous proposons d'élargir le modèle précédent pour décrire les connaissances des élèves par des praxéologies. Ce modèle de praxéologie a l'originalité d'interpréter et de décrire les connaissances de l'élève par le même modèle que celui qu'on utilise pour décrire les attentes et les pratiques institutionnelles.

Nous avons présenté dans le paragraphe précédent les principes qui guident la description des praxéologies d'une organisation mathématique de référence. Le découpage en type de tâches et en sous-type de tâches n'et pas suffisant pour décrire les praxéologies d'un élève. En effet, pour une tâche donnée, relevant d'un type de tâche institutionnel, les élèves peuvent mettre en œuvre des techniques non attendues par I valides ou non mathématiquement. Nous proposons d'inscrire ces techniques dans des praxéologies qui sont à construire par le chercheur.

Dans sa thèse Nguyen (Nguyen, 2006) a rattaché l'analyse de l'erreur à des praxéologies en mettant en évidence les phénomènes suivants :

- L'utilisation d'une technique scientifiquement valide peut conduire à des erreurs.

- Certaines erreurs peuvent être dues à une non-maîtrise de techniques indispensables à la résolution de certaines tâches rencontrées lors de la mise en œuvre d'une technique valide.

- Les erreurs peuvent aussi provenir de l'utilisation de techniques valides sur un champ plus restreint, étendues "abusivement", ou de la mise en œuvre d'une technique scientifiquement valide, mais non adéquate institutionnellement.

Cette catégorisation a été faite pour hiérarchiser les erreurs en relation avec la non-maîtrise de la technique. Ainsi, la première catégorie regroupe les erreurs considérées comme moins

8 ou "les" s'il y a plusieurs techniques

importantes pour la maîtrise de la technique. Par exemple, les erreurs de calculs numériques qui interviennent dans une technique de résolution des équations du second degré relèvent de la première catégorie et sont considérées moins importantes que les erreurs relatives à la factorisation qui est une étape importante de la technique de résolution des équations du second degré.

Dans l'étude de Nguyen (Nguyen, 2006) l'erreur est considérée comme un dysfonctionnement d'une technique institutionnelle. A la suite de cette thèse, nous avons cherché à interpréter l'erreur comme élément constituant d'une technique personnelle de l'élève (Croset & Chaachoua, 2010). Celle-ci peut être valide ou non mathématiquement, conforme ou non aux attentes institutionnelles. Ce point de vue a été développé dans le travail de thèse de Croset (Croset, 2009) en introduisant la notion de praxéologie en acte que nous présentons dans le paragraphe suivant.

Praxéologie personnelle

Dans sa thèse Croset (Croset, 2009, p.177) a définit la notion de praxéologie-en-acte comme suit :

Définition. Nous appelons *praxéologie-en-acte*, le modèle triptyque, d'organisation praxéologique, de l'activité d'un sujet institutionnel constitué des trois composantes :

- Un type de tâche-en-acte qui est un objet [1] que connaît ou *reconnaît* le sujet, dans le sens où le sujet a un rapport à cet objet [Chevallard, 1992, p87]. Le type de tâche-en-acte est l'ensemble des situations que le sujet perçoit comme similaires, provoquant chez lui l'application d'une même technique. Deux types de tâche-en-acte se distinguent par l'induction possible de deux techniques différentes par le sujet modélisé. Le découpage en types de tâche-en-acte ne correspond pas nécessairement à celui de l'institution.
- Une technique-en-acte utilisée par l'élève pour résoudre le type de tâche-en-acte. Elle peut être erronée, correcte, légitimée par l'institution de référence ou non. Elle doit présenter une certaine stabilité dans son utilisation pour être considérée comme technique de résolution. La technique n'acquière sa légitimité chez l'élève que si elle est régulièrement utilisée. Nous évitons ainsi de considérer comme une technique-en-acte, des erreurs d'étourderie ou de dérapage ponctuel.
- Une technologie-en-acte qui, explicite ou non, gouverne et légitime l'utilisation de la technique-en-acte.

1. « un objet existe s'il est connu d'au moins une personne ou une institution (il pourra d'ailleurs n'exister -cas limite- que pour cette personne ou pour cette institution). » [Chevallard, 1992, p87].

Cette définition est une extension de la notion de praxéologie comme modélisation de pratiques institutionnelles à la modélisation des pratiques d'un élève en tant que sujet d'une institution.

Nous reprenons cette définition, mais nous préférons utiliser le terme de *praxéologie personnelle* à la place de *praxéologie-en-acte* par analogie à la notion du rapport personnel.

Ainsi, le rapport institutionnel $R_I(e,O)$ du sujet en position élève à l'objet O au sein d'une institition I est décrit par les praxéologies institutionnelles. Et le rapport personnel $R_p(e^*/I,O)$ d'un élève e*, assujetti à une institution I, à l'objet O est décrit par des praxéologies personnelles.

Nous rejoignons l'hypothèse de recherche validée dans (Croset, 2009) selon laquelle le découpage en type de tâches institutionnels ne correspond pas toujours à celui de l'élève.

La détermination des types de tâches personnelles est liée à la détermination des techniques personnelles. En effet des tâches sont considérées comme du même type de tâches personnelles pour un élève si celui-ci mobilise une même technique personnelle pour les accomplir.

Soit t une tâche prescrite à un élève au sein d'une institution I. Cette tâche relève d'un type de tâches institutionnel T_i ou éventuellement un sous-type de tâches de T_i. Il existe donc une technique institutionnelle τ_i pour accomplir t. On a donc une organisation mathématique ponctuelle, simple ou complexe, relative au type de tâches T_i et qui relève d'une organisation mathématique locale OML_i et éventuellement d'une organisation régionale.

Soit τ_e la technique mobilisée par l'élève pour accomplir la tâche t. Même si τ_e est la même que la technique attendue τ_i, on ne peut pas conclure que le type de tâches de l'élève est le même que le type de tâches institutionnel T_i. En effet, il se peut que pour d'autres tâches qui relèvent du même type de tâche institutionnel T_i, l'élève mobilise une autre technique différente de τ_i.

Nous cherchons la stabilité de la mobilisation de la technique pour les tâches qui relèvent de T_i et éventuellement d'autres types de tâches qui sont proches de T_i et donc qui relèvent de l'organisation mathématique locale OML_i. L'ensemble de ces tâches constitue le type de tâches personnel de l'élève et on a ainsi une praxis personnelle $[T_e/\tau_e]$. Ce diagnostic peut se faire à partir des réponses de l'élève à un ensemble de tâches qui lui sont proposés. La qualité du diagnostic des praxis personnelles dépend de la variété des tâches proposées.

A ce niveau nous obtenons des praxéologies ponctuelles de l'élève. La détermination des technologies de l'élève peut se faire en regroupant ces praxéologies ponctuelles autour d'une organisation locale de l'élève. Cette caractérisation des technologies de l'élève à partir du regroupement des praxéologies ponctuelles doit être appuyée et validée par une méthodologie spécifique comme des interviews des élèves. Voir à ce propos le travail de thèse de Croset (Croset, 2009).

Pour décrire les techniques de l'élève nous reprenons le même modèle utilisé pour décrire les techniques institutionnelles.

III. LA MODELISATION DES CONNAISSANCES DES ELEVES DANS UN EIAH

Dans cette partie nous montrerons comment le modèle praxéologique décrit ci-dessus peut être utilisé en EIAH pour diagnostiquer les connaissances des élèves. On s'appuiera sur des résultats de recherche conduits autour de l'EIAH d'algèbre : Aplusix.

L'environnement Aplusix (Nicaud, Bouhineau, & Chaachoua, 2004) est un EIAH pour pratiquer l'algèbre élémentaire, les transformations d'expressions algébriques, les résolutions d'équations, d'inéquations et de systèmes d'équations, ou encore les résolutions de problèmes par la mise en équation, au lycée et au collège. L'objectif de l'élève dans Aplusix consiste à résoudre, comme sur le papier, des exercices d'algèbre en produisant, ligne de calcul après ligne de calcul, les différents pas de calcul de son raisonnement algébrique. Le cadre mathématique offert pour ce travail est la résolution par équivalence : l'élève doit, à chaque étape, donner une expression algébrique équivalente à l'expression précédente ; il a toute liberté, comme sur le papier, pour le choix de l'expression algébrique de chaque étape et de la forme de son raisonnement (linéaire ou avec des retours en arrière). Au cours de la conception d'Aplusix, les auteurs se sont efforcés de proposer une représentation des expressions algébriques utilisées à l'écran aussi fidèle que possible à la représentation usuelle de ces expressions, telle que chacun peut la donner sur le papier ou au tableau (cf. Figure 1).

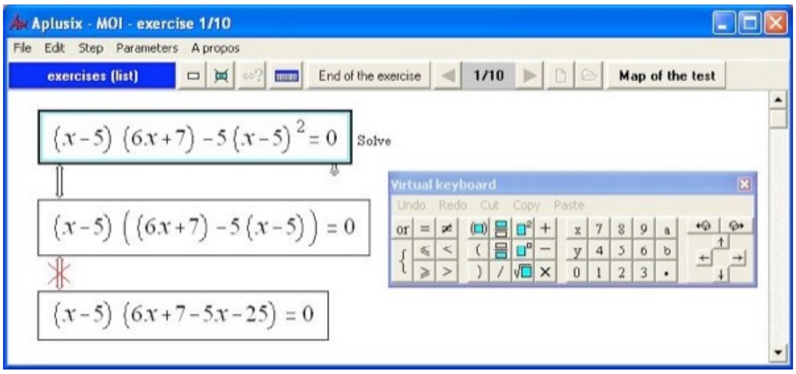

Figure 1. *Résolution d'un exercice par un élève.*

III.1. Nature des traces

Dans la problématique de la modélisation des connaissances de l'apprenant le travail du chercheur commence par le recueil de données expérimentales issues d'un milieu écologique d'apprentissage, ayant la forme de productions écrites ou orales d'élèves, données que nous appelons traces ou traces brutes (Chaachoua, Croset, Bouhineau, Bittar, & Nicaud, 2007). Ce recueil peut se faire automatiquement lorsque le logiciel utilisé dispose de fonctionnalités élémentaires d'enregistrement de journaux d'activités (fichiers « log »), ce qui est le cas du logiciel Aplusix. Le découpage et la réorganisation des traces brutes obtenues à l'étape précédente peuvent se faire automatiquement dans Aplusix grâce à un algorithme de diagnostic local. Le résultat de cette étape, réorganisé linéairement en fonction du temps, peut être vu comme une trace enrichie de l'activité de l'élève. C'est à l'issue de ces étapes qu'on peut produire une modélisation des connaissances des élèves. La qualité didactique de cette modélisation est étroitement liée à la qualité de la trace enrichie. En fait, la trace est enrichie en fonction du modèle utilisé pour la modélisation des connaissances.

Trace brute dans Aplusix

La trace brute est obtenue par enregistrement des événements logiciels provoqués par un élève dans son travail de résolution de problèmes. L'ensemble de ces événements logiciels est conservé sous la forme d'une liste de n-uplets. Chaque n-uplet comporte principalement un marqueur temporel, une information symbolique sur l'action réalisée et l'état du document. La trace brute ainsi obtenue comporte toutes les expressions algébriques produites par l'élève. Elle comporte les essais fructueux, ceux qui apparaîtront dans la solution finale, et les essais infructueux, qui seront effacés après avoir été visualisés, explorés puis abandonnés. Cependant, cette trace comporte aussi beaucoup d'informations qui ne ressortent pas du travail mathématique ou du travail au niveau stratégique de résolution d'un problème algébrique.

Travail de segmentation des traces brutes

Un premier travail de segmentation de la trace est opéré pour ne conserver que des éléments significatifs de la trace brute. Des critères sont utilisés, permettant de filtrer l'ensemble des états intermédiaires d'éditions. Ces critères reposent sur certains événements logiciels considérés comme des indicateurs de validation par l'élève d'un état intermédiaire, cohérent de son travail : introduction, ou suppression, d'une étape algébrique dans le raisonnement de l'élève (équivalent de l'écriture d'une nouvelle ligne de calcul), demande de validation du travail, passage à l'exercice suivant.

À l'issue du travail de segmentation des traces brutes, les expressions algébriques significatives de l'élève obtenues sont associées par deux pour former des *pas de calcul* : à chaque expression significative est associée l'expression significative qui lui précède (dans le raisonnement algébrique de l'élève). Un pas de calcul d'élève comporte donc une étape initiale et une étape finale. Ce travail de segmentation s'effectue en vue des traitements automatiques complexes ultérieurs : analyses statistiques, diagnostic local du travail des élèves ou élaboration d'un modèle de l'élève.

Traces enrichies

A partir de la segmentation précédente, une trace dérivée, importante dans notre système, est obtenue que nous appelons la trace enrichie ou trace complétée. Elle comporte, à la base, les pas de calcul d'élèves issus de la segmentation. Elle est enrichie d'un diagnostic constitué d'une proposition de règles de transformation expliquant le passage de l'expression initiale du pas de calcul à l'expression finale du même pas. Un algorithme utilisant une bibliothèque de règles correctes et incorrectes, mettant en œuvre une recherche heuristique, est utilisé pour effectuer ce diagnostic. Il s'agit d'un diagnostic local qui consiste à associer à un pas d'élève une suite de règles. Un travail fondamental de notre recherche réside dans la construction de cette bibliothèque de règles.

III.2. Modélisation locale

Nous présentons dans ce paragraphe la modélisation locale pour le diagnostic permettant l'obtention d'une trace enrichie. La modélisation consiste à découper chaque pas de calcul d'élève en une suite de pas de calculs élémentaires et d'associer une règle algébrique à chaque pas de calcul élémentaire. Un pas de calcul d'élève peut ainsi être interprété comme la succession d'applications de règles algébriques, cf. Figure 2.

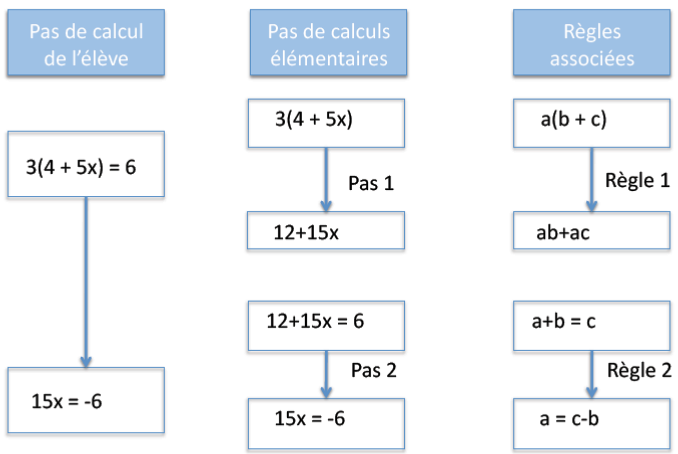

Figure 2 : Exemple d'association d'une séquence de règles à un pas de calcul

Dans cet exemple, le pas de calcul de l'élève est obtenu à partir de la segmentation de la trace brute. Rappelons que la trace brute peut contenir d'autres informations comme des transformations qui ont été supprimées par l 'élève au sein d'une étape. A partir de ce pas de calcul de l'élève, on associe deux pas de calcul élémentaires et à chacun une règle expliquant le calcul élémentaire. Ainsi, le diagnostic local permet d'associer au pas de calcul de l'élève les deux règles. La trace enrichie est constituée du pas de calcul de l'élève et des deux règles obtenues par le diagnostic local.

Pour obtenir la trace enrichie on a besoin de construire une bibliothèque de règles et un processus de diagnostic local. La détermination de cette bibliothèque des règles s'appuie de façon complémentaire sur les travaux de recherches en didactique et sur des expérimentations[9].

III.3. Vers le modèle praxéologique : détermination des praxis personnelles élémentaires

Dans ce paragraphe nous proposons d'illustrer l'utilisation du modèle praxéologique pour la modélisation des connaissances des élèves dans l'EIAH Aplusix. Nous présentons comment on peut passer des règles diagnostiquées au niveau local aux praxis personnelles de l'élève.

Association des règles aux types de tâches élémentaires

Un pas de calcul de l'élève est découpé en plusieurs pas de calcul élémentaire[10]. Le choix a été fait de sorte qu'à chaque pas élémentaire est associé un seul type de tâches. Le découpage en types de tâches est celui de l'organisation mathématique de référence construite par le chercheur. Le chercheur doit donc rattacher les règles[11], correctes et erronées, aux types de tâches élémentaires de l'organisation mathématiques de référence. *A chaque type de tâches élémentaire T on associe donc, par construction manuelle, des règles correctes ou erronées : l'ensemble de ces règles est noté R(T).*

Association des variables de contextes aux types de tâches

Un pas de calcul élémentaire est décrit par une règle détaillée qui est une instanciation de la règle abstraite.

Pour considérer cette règle comme élément constituant d'une technique, nous devons chercher une stabilité dans sa mise en œuvre dans un contexte à caractériser. Pour cela nous introduisons la notion de *variables de contexte* comme éléments d'une expression algébrique pouvant avoir une influence sur le comportement de l'élève. Par exemple, la nature des nombres qui interviennent dans une expression, le signe syntaxique du terme à transposer d'une égalité à une autre, le nombre de termes dans une somme.

Ces variables de contexte sont relatives à un type de tâches dans la mesure où certaines variables ont une influence sur le comportement de l'élève pour un type de tâches et pas sur un autre. *Donc à chaque type de tâches, le chercheur associe un ensemble de variables de contexte associées à T noté G(T).* (Croset, 2009) nomme cet ensemble : groupe de variables de contexte associées *à* T.

La détermination de cet ensemble repose en partie sur une analyse épistémique et sur les résultats des travaux en didactique des mathématiques complétés éventuellement par des expérimentations spécifiques. La difficulté est de trouver un niveau de granularité pertinent pour les interprétations. En effet, plus il est fin plus il permet de mieux rendre compte du

9 La description de la méthodologie est décrite dans (Croset, 2009) et (Chaachoua, 2010)

10 A partir d'un logiciel de diagnostic : Anaïs.

11 issues de la bibliothèque des règles.

contexte mais il risque de ne pas mettre en évidence les régularités entre le contexte et les comportements des élèves. A contrario, s'il n'a pas beaucoup de traits les régulations constatées risquent de ne pas être discriminantes pour les élèves. Le niveau de granularité est déterminé par un aller-retour entre le modèle et les résultats des diagnostics. *Le choix des variables de contexte doit être fait de sorte qu'on puisse retrouver tous les sous types de tâches de l'OM de référence et d'autres types de tâches non institutionnels qui peuvent être des types de tâches personnels.*

Mise en œuvre

A chaque type de tâches institutionnel T, on associe un ensemble de variables de contexte G(T). On construit le vecteur $T_e = (T\ ;\ V_1, V_2, V_3\ldots)$ où les $V_i \in G(T)$. Un *type de tâches personnel a priori* est obtenu lorsque les variables V_i sont instanciées.

On fait la même chose pour les types de tâches intrinsèques : associer un ensemble de variables de contexte et construire les types de tâches personnels intrinsèques a priori.

Ensuite, pour chaque type de tâches élémentaire *T* on associe, par construction manuelle, des règles correctes ou erronées : R(*T*).

Pour déterminer les praxis personnelles élémentaires nous devrions chercher une corrélation entre le contexte et la règle diagnostiquée et plus précisément entre le type de tâches personnel a priori et la technique mobilisée :

> Si une règle R_i de R(*T*) est mobilisée de façon stable par un élève e pour un type de tâches personnel a priori $T_{e,i}$, on dit que $\tau_{ei}=R_i$ est une *technique personnelle élémentaire*, $T_{e,i}$ un *type de tâches personnel élémentaire* et que le couple $(T_{e,i}, \tau_{ei})$ est une *praxis personnelle élémentaire* de l'élève e.

De même,

> Si l'élève mobilise de façon stable une technique τ_e (décrite par une suite de type de tâches personnelles) pour un type de tâches personnel a priori $T_{e,}$, on dit que τ_e est une *technique personnelle*, $T_{e,}$ un *type de tâches personnel*, et que le couple $(T_{e,}, \tau_e)$ est une *praxis personnelle de l'élève e.*

Exemple de mise en œuvre

Dans ce paragraphe nous allons illustrer la mise en œuvre de notre modèle pour illustrer la construction d'une praxis personnelle.

Précisons que ce que nous présentons ci-dessous n'a pas fait l'objet d'une implémentation informatique mais il n'y a aucune contrainte informatique pour le réaliser. Cependant, les études menées dans (Chaachoua, 2010) et (Croset, 2009) ont validé la mise en œuvre didactique et informatique de notre modèle praxéologique dans Anaïs qui à partir des traces brutes permet de déterminer les praxis personnelles élémentaires des élèves.

Considérons la tâche t « résoudre l'équation $(-2x+6)(x-1) = 0$ » proposée à des élèves de Première S.

a) Analyse a priori de la tâche t

La tâche t relève du type de tâches institutionnel $T_{ra\text{-}eq2}$ dont l'OM de référence a été présentée ci-dessus. Deux techniques peuvent être mis en œuvre et qui relèvent respectivement de trois organisations mathématiques ponctuelles $OMP_1(T_{ra\text{-}eq2})$ et $OMP_6(T_{ra\text{-}eq2})$:

$\tau_{r\text{-}eq2.pn} = (T_{pn}\ ;\ T_{r\text{-}eq1})$: présentée dans II.2.

$\tau_{ra\text{-}eq2.devdisc} = (T_{dev},\ T_{red},\ T_{ra\text{-}eq.trin})$

La technique $\tau_{ra\text{-}eq2.devdisc}$ (on développe, on réduit et on applique le discriminant) n'est pas attendue par I_s mais elle peut être mise en œuvre par les élèves. En revanche, la technique $\tau_{r\text{-}eq2.pn}$ est attendue par l'institution I_s.

b) Analyse d'une production d'élève relative à t

Considérons une production d'élève pris dans la thèse de Nguyen (Nguyen, 2006) :

$(-2x+6)(x-1) = 0$

$-2x^2 + 8x - 6 = 0$

$-2x^2 + 8x = 6$

$-2x(x - 4) = 6$

$-2x = 6$ ou $x - 4 = 6$

$x = -3$ ou $x = 10$

Ici, l'élève a développé, puis il a isolé les termes en x à gauche (à l'image de ce qu'on fait dans les équations de degré 1), puis il factorise le membre de gauche pour se ramener à l'équation $P_1(x)\ Q_1(x)$=k.

Nous allons illustrer sur cet exemple le mécanisme qui permet de construire une praxis personnelle[12].

<u>Types de tâches personnels a priori</u>

Au type de tâches $T_{ra\text{-}eq2}$ on associe des variables de contexte. Rappelons que le choix des variables de contexte doit être fait de sorte qu'on puisse retrouver tous les sous types de tâches de l'OM de référence et d'autres types de tâches non institutionnels qui peuvent être des types de tâches personnels. Pour ne pas alourdir notre illustration on va considérer le même ensemble de variables de contexte simple pour le type de tâches $T_{ra\text{-}eq2}$ et le type de tâches intrinsèque T_{pn} « appliquer la règle du produit »[13]. Les variables de contextes sont :

V_1 : membre de gauche est une

- $v_{1.1}$ = somme
- $v_{1.2}$ = produit de facteurs

V_2 : second membre est :

- $v_{2.1}$ = nul
- $v_{2.2}$ = constante non nulle
- $v_{2.3}$ = polynôme

On a donc $G(T_{pn}) = G(T_{ra\text{-}eq2}) = \{V_1\ ;\ V_2\}$.

* Les types de tâches personnels intrinsèques a priori (relatifs au type de tâches T_{pn}) sont définis par le vecteur : $T_e = (T_{pn}\ ;\ V_1,\ V_2)$. Ce qui donne 6 types de tâches personnels intrinsèques a priori. Par exemple : $(T_{pn}\ ;\ v_{1.2},\ v_{2.1})$ correspond au type de tâches intrinsèque de l'OM de référence T_{pn}.

12 Il serait intéressant de reprendre l'étude faite par Nguyen avec notre modèle.

13 Il est évident que nous devions avoir plus de variables de contexte pour $T_{ra\text{-}eq2}$ que T_p pour prendre en compte le degré des polynômes qui interviennent par exemple.

* Les types de tâches personnels a priori (relatifs au type de tâches $T_{ra\text{-}eq2}$) sont définis par le vecteur : T_e= ($T_{ra\text{-}eq2}$; V_1, V_2). Ce qui donne 6 types de tâches personnels a priori. Par exemple : ($T_{ra\text{-}eq2}$; $v_{1.2}$, $v_{2.1}$) correspond au sous-type de tâches de l'OM de référence noté $T_{ra\text{-}eq2.pn}$.

<u>Construction des règles</u>

A ce type de tâches intrinsèque T_{pn} : « appliquer la règle du produit » on associe un ensemble de règles R(T_{pn}). Nous en proposons certaines sans chercher d'exhaustivité :

- τ_{pk} : si AB=k alors A=k ou B=k où A et B peuvent être des nombres ou des polynômes et k un réel non nul.
- τ_{pn} : si AB=0 alors A=0 ou B=0 où A et B peuvent être des nombres ou des polynômes.
- τ_{pk1} : si AB=k alors A=k et B=1 où A et B peuvent être des nombres ou des polynômes et k un réel.
- ...

<u>Construction des praxis personnelles élémentaires</u>

Supposons que pour cet élève on a pu diagnostiqué par ailleurs, qu'il mobilise la règle τ_{pk} de façon stable sur un type de tâches personnel élémentaire a priori T_{pk} = (T_{pk} ; $v_{1.2}$, $v_{2.2}$) ie. P(x)Q(x)=k. Dans ce cas, on peut dire que τ_{pk} est une technique personnelle élémentaire, T_{pk} un type de tâches personnel élémentaire et que le couple (T_{pk}, τ_{pk}) est une *praxis personnelle élémentaire* de l'élève e.

<u>Construction des praxis personnelle</u>

La technique mise en œuvre par l'élève pour résoudre l'équation « $-2x(x - 4) = 6$ » peut être décrite dans notre modèle comme suit $\tau_{ra\text{-}eq2.pk}$ = (T_{pk} ; $T_{r\text{-}eq1}$) où

T_{pk} : appliquer la règle : un produit de facteur égal à une constante si et seulement si l'un des facteurs est égal à une constante. C'est un type de tâches intrinsèque.

La technique τ_{pk} est : si AB=k alors A=k ou B=k.

$T_{r\text{-}eq1}$: résoudre deux équations de degré 1.

Ensuite, on étudie la mise en œuvre de cette technique sur les types de tâches personnels T_e= ($T_{ra\text{-}eq2}$; V_1, V_2). Supposons que le diagnostic montre que l'élève mobilise de façon stable $\tau_{ra\text{-}eq2.pk}$ sur un type de taches personnel a priori ($T_{ra\text{-}eq2}$; $v_{1.2}$, $v_{2.2}$) qu'on notera $T_{ra\text{-}eq2.pk}$, alors on peut dire que : $\tau_{ra\text{-}eq2.pk}$ est une technique personnelle, $T_{ra\text{-}eq2.pk}$ un type de tâches personnel et que le couple ($T_{ra\text{-}eq2.pk}$, $\tau_{ra\text{-}eq2.pk}$) est une *praxis personnelle* de l'élève e.

IV. CONCLUSION

Le travail présenté dans cet article a montré comment nous avons adapté le modèle praxéologique à une problématique EIAH : celle de la modélisation des connaissances. Notre recherche porte sur la construction d'un module de l'apprenant dans un EIAH constitué de trois composantes : des données d'entrée, un diagnostic et des sorties (Self, 1999). Nous avons montré la pertinence du modèle praxéologique pour la modélisation des connaissances des élèves dans un EIAH et en particulier pour la fonction diagnostic. Ce modèle, permet d'avoir différents niveaux de diagnostic et peut donc nous fournir des informations pertinentes au niveau didactique. C'est cette dimension que nous souhaitons poursuivre : exploiter le diagnostic pour construire des parcours d'apprentissage adaptés à chaque élève, fournir à un enseignant ou à un tuteur intelligent un bilan sur les élèves pour l'aider aux prises de décisions didactiques…

Au delà de la problématique EIAH, notre travail sur le modèle praxéologique a permis, d'apporter un cadre générale et méthodologique pour définir les éléments de la praxéologie, en particulier pour la praxis. Le modèle de description proposé permet de mieux articuler les organisations praxéologiques entre elles à travers l'idée de cartes praxéologiques afin d'analyser les pratiques institutionnelles.

Enfin, le fait d'élargir le modèle praxéologique pour décrire le rapport personnel constitue pour nous un apport fondamental dans l'approche anthropologique.

BIBLIOGRAPHIE

Assude, T. (1992). Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique, écologie de l'objet "racine carré" et analyse du curriculum. Grenoble: Université Joseph Fourier.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. Recherches en Didactique des Mathématiques , 19, pp. 77-124.

Bosch, M., & Gascon, J. (2004). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Balises pour la didactique des mathématiques (pp. 1-15). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bronner, A. (1997). Etude didactique des nombres réels. Idécimalité et racine carrée. Thèse. Grenoble: Université Joseph Fourier .

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignor´es par les institutions d'enseignement. Recherche en Didactique des Mathématiques , 28 (2), pp. 135-182.

Chaachoua, H. (1997). Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Étude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes. Thèse. Grenoble: Université Joseph Fourier .

Chaachoua, H. (2010). La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves. Noter d esynthèse HDR. Grenoble: Université Joseph Fourier.

Chaachoua, H., Croset, M., Bouhineau, D., Bittar, M., & Nicaud, J. (2007). Description et exploitations des traces du logiciel d'algèbre Aplusix. . Revue Sciences et Techniques de l'Information et de la Communication pour l'Éducation et la Formation, revue Sticef , 14.

Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. Séminaire de didactique des Mathématiques et de l'informatique , pp. 211-235.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques , 12/1, 73 - 112.

Chevallard Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2), 221-266.

Chevallard Y. (2002), Organiser l'étude 1. Structures et Fonctions. Organiser l'étude 3. Ecologie et régulation. In J-L. Dorier & Al. (Eds) Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques –Corps, 21-30 Août 2001- (pp. 3-22 et pp. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In S. Maury, & M. Caillot, Rapport au savoir et didactiques (pp. 81-104,). Paris: Fabert.

Cirade, G., & Matheron, Y. (1998). Equations du premier degré et modélisation algébrique. Actes de l'université d'été de la Rochelle : Analyse des pratiques enseignantes et didactque des mathématiques. IREM de Clermont-Ferrand.

Croset, M. (2009). Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte. grenoble: Thèse d'université. Univ.

Croset, M., & Chaachoua, H. (2010). Modélisation des connaissances des élèves en termes de Praxis-en-Acte. Actes du 3e congrès pour la Théorie Anthrophogique du didactique. Sant Hilari Sacalm, Espagne.

Grugeon, B. (1995). Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à lalgèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G. Thèse. Paris: IREM Paris VII.

Nguyen, A. (2006). Les apports d’une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l’enseignement secondaire au Vietnam et en France. Thèse de Doctorat. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Nguyen, A., Chaachoua, H., & Comiti, C. (2007). De l'usage de la TAD pour l'analyse des erreurs. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Garcia (Ed.), Sociedad, Escuela y matematicas. Aportaciones de la teoria Antropologica de lo Didactico (pp. 621-640). Universidad de Jaen.

Nicaud, J., Bouhineau, D., & Chaachoua, H. (2004). Mixing microworld and CAS features in building computer systems that help students learn algebra. International Journal of Computers for Mathematical Learning , 9(2).

Self, J. (1999). The defining characteristics of intelligent tutoring systems research: itss care, precisely. International Journal of Artificial Intelligence in Education , 10, 350-364.

ANNEXE

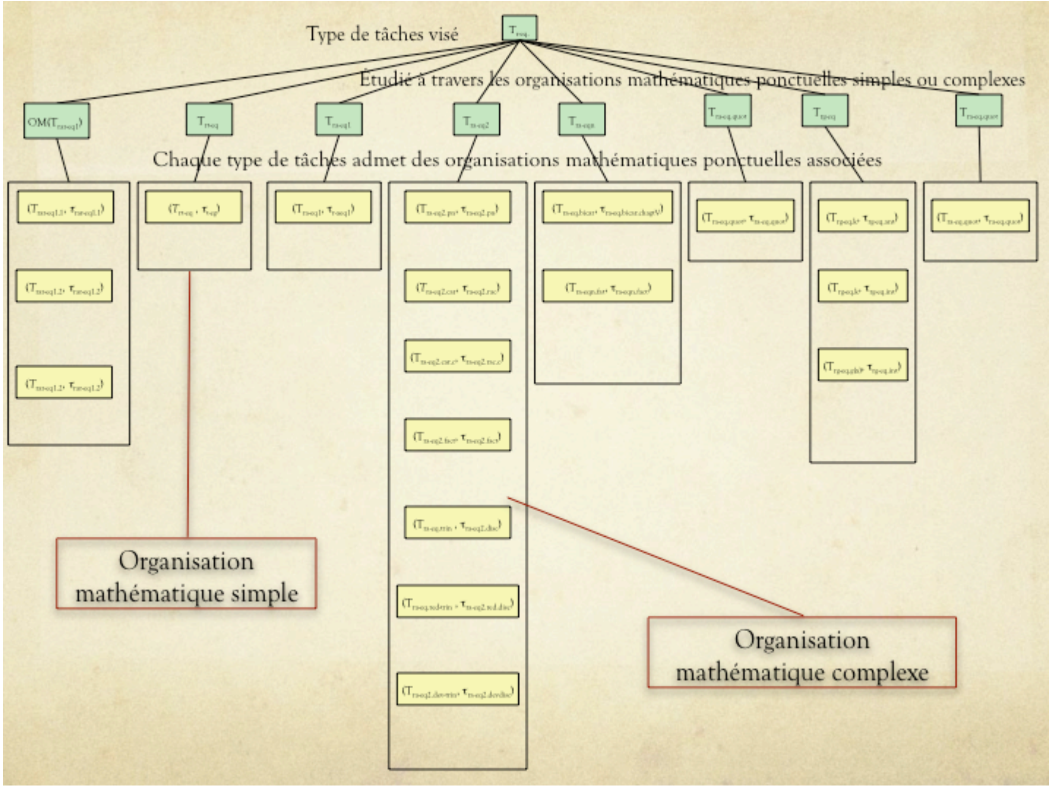

Fig.1 Représentation partielle d'une carte praxéologique autour d'un type de tâche visé

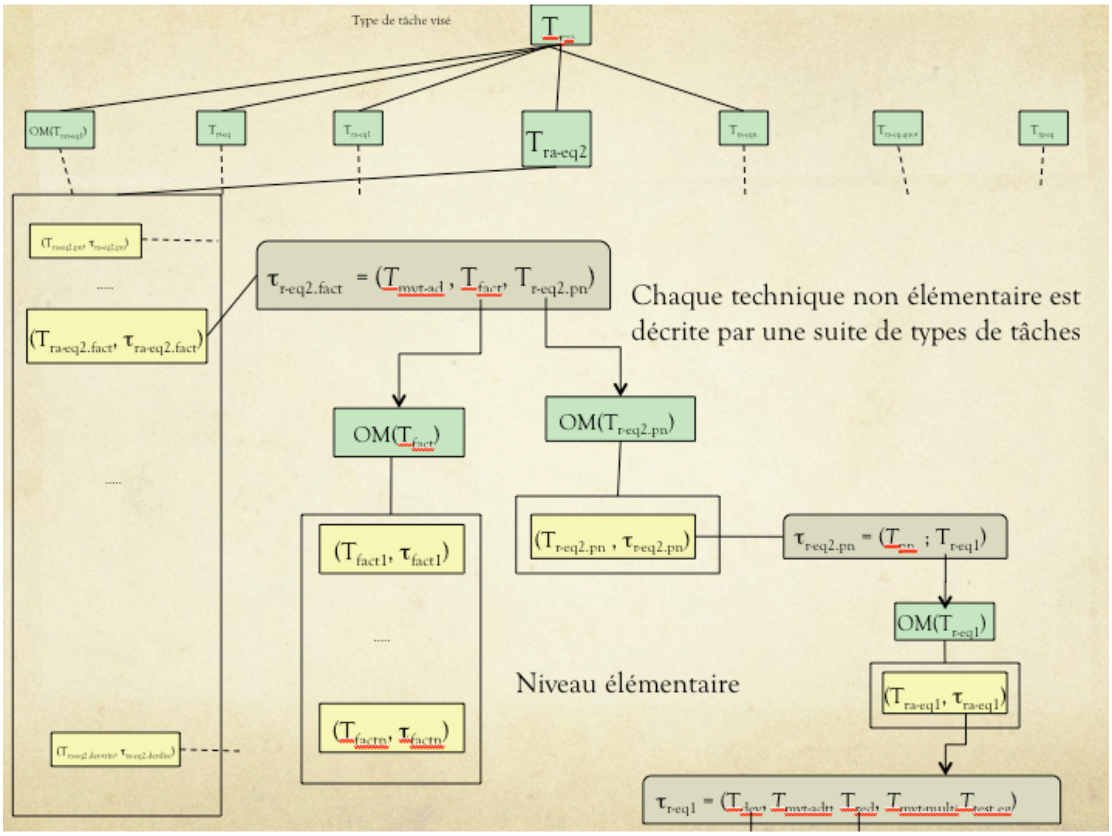

Fig2. Représentation de la carte praxéologique avec différents niveaux de description.